ANNEXE 2

Accords

Un accord est la superposition de deux ou plusieurs sons musicaux. Les personnes expertes sont capables d'analyser un accord et de reconstituer quelles sont les notes qui le composent. Et même, un chef d'orchestre est capable de distinguer plusieurs instruments jouant la même note, un chef de chœur plusieurs choristes chantant la même note. Ici, je vais m'occuper de synthèse plutôt que d'analyse. Nous allons voir que superposer deux ou plusieurs vibrations, de fréquences différentes, fait apparaître de nouvelles fréquences de vibrations, c'est-à-dire de nouvelles notes qui ne sont pas jouées. Entendre un accord, ce n'est pas seulement entendre plusieurs notes, mais entendre leur synthèse.

1. Accord de deux notes simples

Par note simple, j'entends des sons produits par des vibrations sinusoïdales (de la corde ou de l'air dans le tuyau), juste la vibration fondamentale, sans harmoniques. On va utiliser l'égalité trigonométrique

$$\sin p + \sin q = 2\,\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\,\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

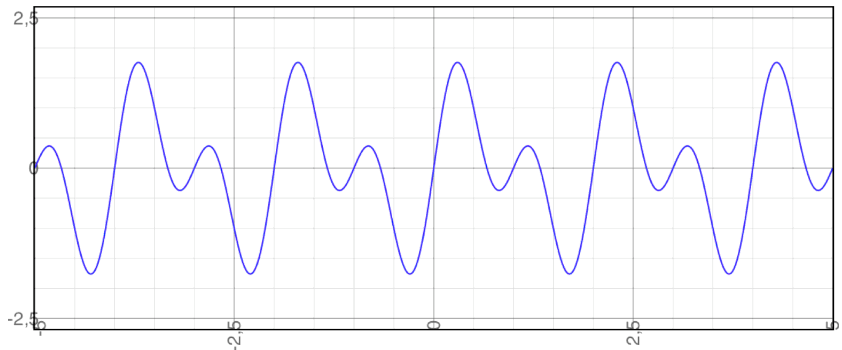
Cette relation transforme une somme en un produit. Le premier membre rend compte d'une superposition de sons, le second membre d'un « mélange » de vibrations.

1.1. Accord d'octave

La courbe ci-dessous est la représentation de la fonction

$$\sin(\pi t) + \sin(2\pi t).$$

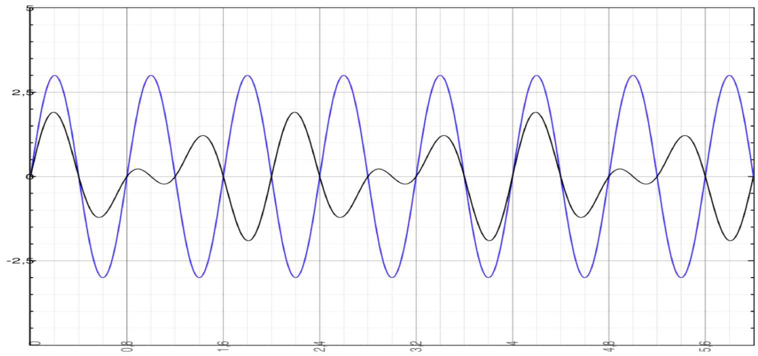
Elle représente la superposition d'une vibration de fréquence $1/2$ et d'une vibration de fréquence 1, en fonction du temps t. Ce qu'on obtient, c'est comme une note fondamentale, par exemple $do\,2$, et son harmonique $do\,3$.



Est-ce que la note haute a donné du timbre à la note basse ? ou bien la note basse a-t-elle donné de la couleur à la note haute ? Qu'en pensent les ténors, qu'en pensent les basses, quand ils chantent ensemble deux notes à l'octave ?

1.2. Accord de quinte

Voici maintenant, tracée en noir, la superposition d'une note de fréquence 1 et d'une note de fréquence $3/2$ (quinte exacte au-dessus de la note de fréquence 1). En bleu, on a tracé une vibration de fréquence $5/4$ (tierce exacte au-dessus de la note de fréquence 1). On peut se représenter musicalement la chose en pensant que l'on joue l'accord $do\,3 + sol\,3$ et qu'en bleu, c'est la note $mi\,3$.



Sur la courbe, on voit que les arches de grande amplitude de l'accord s'inscrivent dans les arches de la sinusoïde du *mi* ou de son opposée, et que les arches de faible amplitude permettent les transitions.

Mathématiquement, la superposition des deux notes s'écrit

$$\sin(2\pi t) + \sin(\tfrac{3}{2}(2\pi t)) \;=\; 2\,\sin(\tfrac{5}{4}(2\pi t))\,\cos(\tfrac{1}{4}(2\pi t)).$$

Le facteur en *cosinus* a la fréquence $1/4$, la fréquence du $do\,1$. Le facteur en *sinus* a la fréquence $5/4$, celle du $mi\,3$. Le $do\,3$ est l'harmonique de rang 4 du $do\,1$, le $sol\,3$ est l'harmonique de rang 6 du $do\,1$, le $mi\,3$ est l'harmonique de rang 5 du $do\,1$ (*).

En tempérament égal, voici les fréquences des harmoniques de $do\,1$:

$$65{,}4\ ;\quad 130{,}8\ ;\quad 196{,}2\ ;\quad 261{,}6\ ;\quad 327\ ;\quad 392{,}4$$

et les fréquences fondamentales des notes de l'accord parfait :

$$do\,3\ :\ 261{,}6\ ;\quad mi\,3\ :\ 329{,}6\ ;\quad sol\,3\ :\ 391{,}9$$

1.3. Accord de tierce

Le phénomène est analogue à celui observé pour la quinte.

$$\sin(2\pi t) + \sin(\tfrac{5}{4}(2\pi t)) \;=\; 2\,\sin(\tfrac{9}{8}(2\pi t))\,\cos(\tfrac{1}{8}(2\pi t)).$$

On voit apparaître la fréquence $9/8$, qui est celle d'un ton au-dessus de de la fréquence 1. On joue $do + mi$ et on fabrique *ré*. Les trois notes sont des harmoniques du $do\,0$, respectivement de rangs 8, 9 et 10.

2. Harmoniques d'une même note ou harmonique commune ?

Dans un tempérament de Pythagore, tous les intervalles correspondent à des rapports de fréquences rationnels. Dans ces conditions, si l'on prend deux ou trois notes, leurs fréquences ont un « plus grand diviseur commun », autrement dit, ces notes sont les harmoniques d'une même note plus

(*) L'usage est de compter le rang des harmoniques à partir de la vibration fondamentale et de dire que la fondamentale est l'harmonique de rang 1.

basse. Les fréquences ont aussi un « plus petit multiple commun », c'est-à-dire que les notes ont une plus proche harmonique en commun.

2.1. Les harmoniques

Les harmoniques d'une note peuvent être exactement (ou seulement à peu près) le son fondamental d'une note plus haute. Prenons pour exemple les harmoniques de la note $do\,2$. Pour repérer les notes plus hautes qui sont des harmoniques de la note $do\,2$, nous avons besoin d'avoir sous les yeux un tableau des fréquences des notes de la gamme. Je choisis de prendre les fréquences de la gamme de Pythagore ; voici leur liste :

$do\,3$	$do^{\#}\,3$	$ré\,3$	$ré^{\#}\,3$	$mi\,3$	$fa\,3$	$fa^{\#}\,3$	$sol\,3$	$sol^{\#}\,3$	$la\,3$	$la^{\#}\,3$	$si\,3$	$do\,4$
$260,7$	$278,4$	$293,3$	$313,2$	330	$347,7$	$371,3$	$391,1$	$417,7$	440	$469,9$	495	$521,5$

Voici maintenant les fréquences des harmoniques de la note $do\,2$:

rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
fréquence	$130,4$	$260,7$	$391,1$	$521,5$	$651,9$	$782,2$	$912,6$	$1043,0$	$1173,3$	$1303,7$

- rang 1 : $do\,2$;
- rang 2 : $do\,3$: multiplier par 2, c'est monter d'une octave ;
- rang 3 : $sol\,3$: multiplier par 3, c'est monter d'une octave et d'une quinte ;
- rang 4 : $do\,4$: multiplier par 4, c'est monter de deux octaves ;
- rang 5 : multiplier par 5, c'est monter de deux octaves (rapport 4) et d'une tierce majeure exacte (rapport $5/4$) ; mais la tierce $do-mi$ de Pythagore n'est pas exacte : le rapport de fréquences est $660/521,5$ soit $1,265\ldots$ au lieu de $1,25$ pour une tierce exacte ;
- rang 6 : $sol\,4$: sans surprise, une octave au-dessus du rang 3 ;
- rang 7 : cette harmonique est située entre $la\,4$ (fréquence 880) et $si\,4$ (fréquence 990) ; elle est voisine de $la^{\#}$ ($939,7$) et encore plus voisine de $si^{\flat}$ ($927,1$) ;
- rang 8 : $do\,5$: deux octaves ;
- rang 9 : $ré\,5$: une octave et une quinte au-dessus du rang 3 ;
- rang 10 : à l'octave de l'harmonique de rang 5, avec toujours la même inexactitude pour la tierce majeure.

2.2. Accord parfait majeur

Cet exemple a déjà été entrevu dans l'étude de la quinte. Les trois notes do, mi, sol sont les harmoniques de rang 4, 5 et 6 du do qui est deux octaves en-dessous. Disons cela autrement : les fréquences de cet accord sont dans les rapports 1, $5/4$ et $3/2$. Le plus grand diviseur commun est la fraction $1/4$, et l'on a en effet

$$1 = 4 \times (1/4)\ ;\quad 5/4 = 5 \times (1/4)\ ;\quad 3/2 = 6 \times (1/4).$$

Vérifions en regardant les valeurs des fréquences. Pour les trois notes de l'accord, dans l'octave de $do\,3$, les fréquences sont :

$$do\,3\ :\ 260,7\ ;\quad mi\,3\ :\ 330\ ;\quad sol\,3\ :\ 391,1\,.$$

Les fréquences des harmoniques de $do\,1$ sont les suivantes :

rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
fréquence	65, 2	130, 4	195, 6	260, 7	325, 9	391, 1	456, 3	521, 5	586, 7	651, 0

On retrouve bien, à l'inexactitude près de la tierce majeure, que les trois notes de l'accord sont les harmoniques de rang 4, 5 et 6 de $do\,1$.

2.2. Accord parfait mineur

C'est l'accord $do - mi^\flat - sol$ correspondant aux rapports de fréquences 1, $6/5$ et $3/2$. Le plus grand diviseur commun est $1/10$ et on a

$$1 = 10 \times (1/10)\ ;\quad 6/5 = 12 \times (1/10)\ ;\quad 3/2 = 15 \times (1/10).$$

Ainsi, les notes do, $mi^\flat$, sol de la gamme de $do\,3$ sont des harmoniques de $la^\flat 0$, de rangs trop élevés pour qu'elles soient perceptibles lorsque l'on joue un $la^\flat 0$.

En revanche, les fréquences ont un plus petit multiple commun pas trop lointain, qui est le nombre 6 ; on a

$$6 = 6 \times 1\ ;\quad 6 = 5 \times (6/5)\ \text{ et } 6 = 4 \times (3/2).$$

Traduisons en termes musicaux : la note $sol\,5$ est l'harmonique de rang 4 de $sol\,3$, l'harmonique de rang 5 de $mi^\flat 3$ et l'harmonique de rang 6 de $do\,3$.

Retour au mode majeur : ceci nous fait penser que nous n'avons pas cherché le plus petit multiple commun pour l'accord parfait majeur. Le plus petit multiple entier commun des nombres 1, $5/4$ et $3/2$ est le nombre 15. La première harmonique commune est $si\,6$, harmonique de rang 10 de $sol\,3$, de rang 12 de $mi\,3$ et de rang 15 de $do\,3$. Ces harmoniques ont un ramg trop élevé pour être audibles.

Remarquez-vous la dualité entre les deux accords parfaits, le majeur et le mineur ? Est-ce que cela vous étonne ?

3. Accords agréables

La question de l'agrément d'écoute d'un accord de deux ou trois notes, avec ou sans harmoniques, a été étudiée expérimentalement par des chercheurs en psychologie cognitive de l'université d'Osaka (Japon). Ils rendent compte de leurs travaux dans un récent article (*). Il semble que, pour deux notes simples, c'est la proximité qui produit une impression de dissonance. Lorsque l'on introduit des harmoniques, ce sont les quartes et les quintes qui seraient les plus assonantes, sans doute parce que leurs premières harmoniques restent distantes (je n'ai pas approfondi). Pour les accords de trois notes, avec harmoniques, ce sont les accords parfaits, majeurs et mineurs, ainsi que les accords parfaits renversés, qui sont les plus assonants.

(*) Cook (Norman D.) & Hayashi (Takefumi), De l'harmonie musicale à l'émotion, *Pour la Science*, n° 391, mars 2010, p.44-51