ANNEXE 3

Les trois longueurs

Travaux pratiques

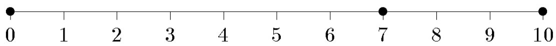
Commençons d'abord par traiter un exemple. Regardons la suite des nombres multiples de 7 :

$$7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ 42,\ 49,\ 56,\ 63,$$

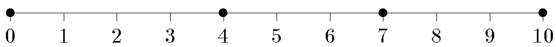
et regardons le chiffre des unités de ces nombres :

$$7,\ 4,\ 1,\ 8,\ 5,\ 2,\ 9,\ 6,\ 3.$$

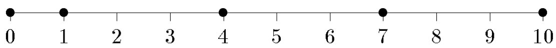
Plaçons maintenant ces nombres, l'un après l'autre dans l'intervalle de 0 à 10. Le premier nombre 7 coupe l'intervalle en deux intervalles, l'intervalle $(0,7)$ dont la longueur est 7 et l'intervalle $(7,10)$ dont la longueur est 3 .



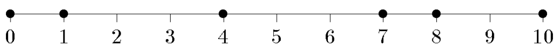
Le deuxième nombre 4 coupe le grand intervalle $(0,7)$ en deux intervalles, l'un de longueur 3 et l'autre de longueur 4.



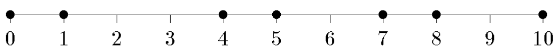
Le troisième coupe l'intervalle $(0,4)$, le plus long, en deux intervalles, en deux intervalles, l'un de longueur 3 et l'autre de longueur 1.



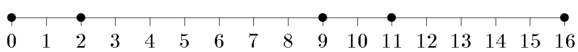
À la quatrième étape, le nombre 8 coupe encore un grand intervalle de longueur 3 et on obtient un découpage en cinq intervalles dont les longueurs sont 3, 2 et 1.



Ajoutons le cinquième nombre 5.



On peut recommencer ce petit jeu avec d'autres données et une présentation différente. Au lieu de parler des multiples de 7, on choisit un *intervalle de base*, par exemple $(0,16)$ et un *nombre de pas*, par exemple 9. À partir de 0, on fait une première *étape* en avançant de 9 pas et on marque le point 9. On fait encore une étape de 9 pas : on avance de 7 pas jusqu'en 16 et, comme si la piste était un circuit fermé, on se retrouve en 0 et on avance des deux pas restant jusqu'au point 2 que l'on marque. Et ainsi de suite, on marque 11, puis 4, etc.



Le premier jeu, avec les multiples de 7 est bien un jeu de ce type ; l'intervalle de base est l'intervalle $(0,10)$ et les étapes font 7 pas.

Recommencez ce jeu avec d'autres choix de l'intervalle de base et de la longueur des étapes. Vous pourrez observer que les lois suivantes sont toujours respectées :

A. *Après la n-ième étape, l'intervalle de base est divisé par les marques en* $n+1$ *intervalles. Les longueurs de ces intervalles ont au plus trois valeurs, soit une, soit deux, soit trois valeurs.*

B. *Dans le cas de trois longueurs, si l'on appelle* α *la longueur du premier intervalle (dont l'origine est* 0 *) et* β *la longueur du dernier intervalle (d'extrémité* 1 *), les trois longueurs sont* α *,* β *et* $\alpha+\beta$ *. À l'étape suivante, un grand intervalle de longueur* $\alpha+\beta$ *est partagé en deux intervalles de longueurs* α *et* β *.*

C. *Dans le cas de deux longueurs* α *et* β *, à l'étape suivante, un intervalle de la plus grande des deux longueurs est partagé en deux. Si, par exemple, c'est* α *qui est plus grand que* β *, un intervalle de longueur* α *est partagé en un intervalle de longueur* β *et un intervalle de longueur* $\alpha-\beta$ *.*

D. *Dans le cas d'une seule longueur, à l'étape suivante, on repasse sur des points déjà marqués.*

Le théorème

Ce théorème fait une apparition dans la littérature mathématique il y a une soixantaine d'années, et certains auteurs le désignent sous le nom de *conjecture de Steinhaus*. Depuis cette époque, diverses approches en ont été données par plusieurs mathématiciens qui poursuivaient des buts différents, N.B. SLATER (1950), K. FLOREK (1951), S. HARTMAN (1952) V.T. SÓS (1957, 1958), S. ŚWIERCZKOWSKI (1958), J. SURÁNIYI (1958), J.H. HALTON (1965). Plus récemment, l'article de Noel B. SLATER (Gaps and steps for the sequence $n\theta$ mod 1 , *Proc. Camb. Phil. Soc.* **63** (1967) 1115-1123), donne une présentation claire et une démonstration très simple du théorème. Il analyse et situe les diverses approches antérieures, et surtout, donne une description complète des découpages successifs des intervalles.

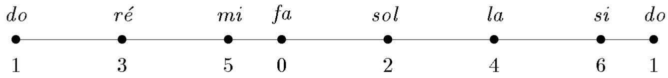
Ce théorème affirme simplement (et démontre) les quatre règles que nous avons énoncées ci-dessus, mais dans un cadre plus général. On quitte les nombres entiers ; l'intervalle de base et les étapes ont des longueurs qui ne sont plus nécessairement des nombres entiers.

Pour construire les notes de musique

On reprend notre jeu avec de nouvelles données. L'intervalle de base est une *octave* et la longueur d'une étape est une *quinte* exacte. Attention, nous sommes dans l'additif, nous **ajoutons** des intervalles. La **longueur** de l'octave est $ln(2)$ et la **longueur** de la quinte exacte est $ln(3/2)$, où ln désigne la fonction *logarithme* qui transforme les rapports de fréquences en longueurs d'intervalles.

Une petite variante : pour être conforme aux habitudes des musiciens, nous prenons une octave $do-do$ comme intervalle de base, mais nous prenons comme point de départ la note fa . On a donc déjà fait un pas lorsqu'on arrive en do . Cela ne change rien aux règles que nous avons énoncées.

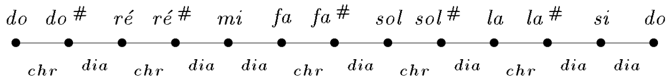
Au départ, la note fa partage l'octave en une quinte exacte (rapport $3/2$, longueur $ln(3/2)$,) et une *quarte* exacte (rapport $4/3$, longueur $ln(4/3)$). Voici ce qu'on obtient après la sixième quinte :



Il y a 5 grands intervalles correspondant à des rapports de fréquence égaux à $9/8$ et deux petits intervalles correspondant tous deux à un rapport de fréquence égal à $256/243$. On parle de cinq *tons majeurs* et de deux demi-tons *diatoniques* pythagoriciens.

Après la onzième quinte, on obtient à nouveau un découpage avec deux longueurs d'intervalles seulement. Chacune des notes $fa^{\#}$, $do^{\#}$, $sol^{\#}$, $ré^{\#}$ et $la^{\#}$ a partagé l'un des cinq tons en deux demi-tons, un demi-ton diatonique de la même longueur que $mi - fa$ et un demi-ton, dit demi-ton *chromatique* (rapport $3^7/2^{11}$, soit $2187/2048$), un peu plus grand que le demi-ton diatonique.

La différence entre le demi-ton chromatique et le demi-ton diatonique est appelée *comma pythagoricien*. Elle correspond à un rapport de fréquences égal à $3^{12}/2^{19}$, soit $531.441/524.288$. Cette différence entre les deux demi-tons est de l'ordre de $1,3\%$; elle est perceptible, mais proche de la limite de perception de la plupart des oreilles.



Si l'on continue, maintenant que nous avons compris le mécanisme des trois longueurs, nous savons que les cinq quintes suivantes vont s'attaquer aux grands intervalles, les demi-tons chromatiques de longueur α, et les partager en un demi-ton diatonique de longueur β et un comma de Pythagore de longueur $\alpha - \beta$. On se trouvera à la tête de 12 demi-tons diatoniques et de 5 commas de Pythagore. Musicalement, on a construit les notes $mi^{\#}$, $si^{\#}$ et les doubles dièses de fa, do et sol.

Ensuite, on retrancherait à chaque demi-ton diatonique un comma pythagoricien, puis un autre, etc. On aboutirait d'abord à une division de l'octave en 29 intervalles, 17 commas pythagoriciens et 12 intervalles d'un demi-ton moins un comma, puis en 41 intervalles, puis en 53 intervalles , 41 commas et 12 petits intervalles un peu plus petits, mais assez voisins du comma. Il ne me semble pas que ces divisions en 29 , 41 ou 53 intervalles aient été exploitées par les musiciens.

Si, au contraire, on s'était arrêté dès la quatrième quinte, on aurait obtenu une gamme *pentatonique* comportant trois tons et deux tierces mineures, mais aucun demi-ton. Si l'on place le point de départ en do au lieu de fa, on obtient les notes do, $ré$, mi, sol, la, do.

Cette gamme serait représentative de la musique chinoise (source : *Encyclopædia universalis*, article GAMME). C'est aussi sur ce type de gamme qu'est composé le *blues* avec l'adjonction de la *blue note*, ici la note $mi^{\flat}$.

On peut matérialiser facilement sur un piano une gamme pentatonique avec comme point de départ la touche $fa^{\#}$: ce sont les cinq touches noires qui forment cette gamme.

Variantes

Essayons maintenant de procéder comme précédemment mais, au lieu de quintes exactes, utilisons comme étapes des intervalles différents, mais cependant voisins de la quinte exacte. Pour ne pas nous dépayser, nous conservons le nom des notes, mais, comme ce ne sont pas les notes exactes, nous le signalons par un petit signe comme mi^p ou mi^h .

Commençons avec une intervalle valant $3/5$ d'octave (en additif). C'est un peu plus grand que la quinte exacte qui vaut, en additif, $ln\,(3/2)/\,ln(2)$, soit environ $0,5849$. Partons de la note *do* . Au bout de 5 pas, on est revenu au départ. On obtient un partage de l'octave en cinq intervalles égaux. On peut dire que l'on a agrandi les cinq tons de la gamme au détriment des demi- tons pour obtenir une gamme pentatonique de tempérament égal.

do	$ré^p$	mi^p	sol^p	la^p	do
0	2	4	1	3	5

Recommençons avec un intervalle valant $4/7$ d'octave, qui est un peu plus petit que la quinte exacte. On obtient, après le sixième pas, le même schéma qu'avec la quinte exacte, mais au septième pas, on retombe sur la note fa de départ au lieu de la nouvelle note $fa^{\#}$. On a raccourci les tons et allongé les demi-tons pour en faire sept intervalles de même longueur.

do	$ré^h$	mi^h	fa^h	sol^h	la^h	si^h	do
0	2	4	6	1	3	5	7

Essayons enfin avec $7/12$ d'octave. On obtient le partage en douze intervalles égaux. C'est la gamme tempérée de Werkmeister popularisée par Bach. Les quintes sont un peu courtes, mais un demi-ton est exactement la moitié d'un ton.

do	$do^{\#}$	$ré$	$ré^{\#}$	mi	fa	$fa^{\#}$	sol	$sol^{\#}$	la	$la^{\#}$	si	do

Les fractions $3/5$, $4/7$ et $7/12$ n'ont pas été choisies au hasard. Les deux premières sont les bornes du créneau dans lequel les notes vont bien s'organiser dans l'ordre habituel *do - ré - mi - fa - sol - la - si* .

D'autre part, les fractions $3/5$ est $7/12$ sont des *convergentes* du nombre $\theta = ln\,(3/2)/\,ln\,(2)$. Si l'on veut une approximation en intervalles égaux de la gamme de Pythagore (tempérament égal), il faut aller chercher des fractions rationnelles proches du nombre θ . Ce sont justement les convergentes du nombre θ qui sont les meilleures approximations, dans un sens précis que je ne développerai pas ici. La convergente suivante du nombre θ est la fraction $24/41$. Elle correspond à la subdivision que nous avons évoquée plus haut en 41 intervalles.

J'espère que cette petite exploration mathématique explique bien les raisons du choix du tempérament égal en douzièmes d'octave tous égaux.

—— o o o ——